

## 12. 5. ŚREDNIA ARYTMETYCZNA I ŚREDNIA WAŻONA

### Średnia arytmetyczna

Średnią arytmetyczną liczb  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$  nazywamy liczbę  $\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n}{n}$

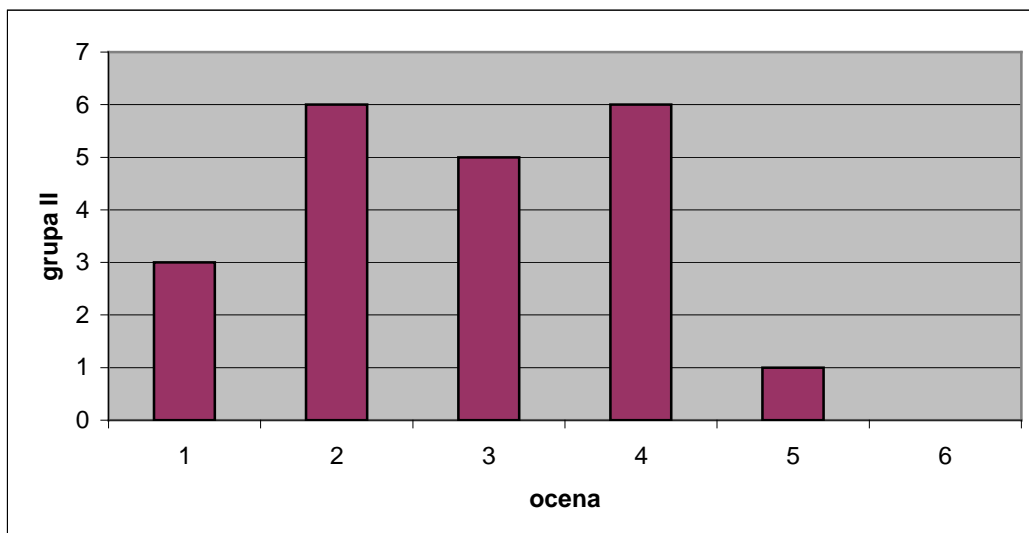
**Przykład 12.5.1.** Oblicz średnią arytmetyczną danych liczb

a) 1,1,1,1,3,3,3,4,4,5

b) 2,4,6,8,...26

Rozwiązanie	Komentarz
<p><b>a)</b></p> $\bar{x} = \frac{1+1+1+1+3+3+3+4+4+5}{10} =$ $= \frac{4 \cdot 1 + 3 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + 5}{10} = \frac{4+9+8+5}{10} = \frac{26}{10} = 2,6$	<p>Ilość wszystkich liczb : <math>n = 10</math></p>
<p><b>b)</b></p> $a_n = a_1 + (n-1) \cdot r$ $26 = 2 + (n-1) \cdot 2$ $26 = 2 + 2n - 2$ $2n = 26 / : 2$ $n = 13$ $S_{13} = \frac{2 \cdot 2 + (13-1) \cdot 2}{2} \cdot 13 = \frac{4+24}{2} \cdot 13 = 182$	<p>Liczby 2,4,6,8,...26 tworzą ciąg arytmetyczny , w którym <math>a_1 = 2; r = 2</math> . Sumę tych liczb policzymy ze wzoru na sumę częściową ciągu arytmetycznego:</p> $S_n = \frac{2a_1 + (n-1) \cdot r}{2} \cdot n .$ <p>Zanim będziemy liczyć tą sumą , musimy najpierw obliczyć <math>n</math> – liczbę wyrazów ciągu. Będziemy korzystać ze wzoru ogólnego ciągu arytmetycznego:</p> $a_n = a_1 + (n-1) \cdot r$
$\bar{x} = \frac{2+4+6+\dots+26}{13} = \frac{182}{13} = 14$	<p>Obliczamy średnią arytmetyczną liczb: 2,4,6,8,...26.</p>

**Przykład 12.5.2.** Na diagramie przedstawiono zestawienie ocen z klasówki w grupie drugiej. Oblicz średnią ocen klasy. Wynik podaj z dokładnością do jednego miejsca po przecinku.



Rozwiązanie	Komentarz
$\bar{x} = \frac{3 \cdot 1 + 6 \cdot 2 + 5 \cdot 3 + 6 \cdot 4 + 1 \cdot 5}{21} =$ $= \frac{3 + 12 + 15 + 24 + 5}{21} = \frac{59}{21} \approx 2,8$	Z klasówki zastało wystawionych 21 ocen: trzy ndst, sześć dop, pięć dst, sześć db, jedna bdb.

Przykład 12.5.3. Rozpatrzmy osiem liczb. Średnia arytmetyczna tych ośmiu liczb jest równa 16. Średnia arytmetyczna siedmiu pierwszych z powyższych liczb wynosi 17. Wyznacz ósmą liczbę.

Rozwiązanie	Komentarz
$\frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8}{8} = 16 / \cdot 8$ $\frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7}{7} = 17 / \cdot 7$ $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 = 128$ $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 = 119$ $119 + x_8 = 128$ $x_8 = 128 - 119$ $x_8 = 9$ <p><b>Odp.:</b> Ósma liczba jest równa 9.</p>	<p>Analiza zadania.</p> <p>Do pierwszego równania za <math>x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7</math> podstawiamy 119</p>

Przykład 12.5.4. Średnie miesięczne wynagrodzenie w pewnej firmie zatrudniającej 20 pracowników wynosiło 3200 zł. Zatrudniono nowego pracownika. Ile zarabia nowo zatrudniony pracownik, jeśli obecnie średnie miesięczne wynagrodzenie w firmie jest o 2% wyższe niż poprzednio?

Rozwiązanie	Komentarz
<p><b>Dane :</b> <math>n = 20</math>  <math>\bar{x} = 3200</math>  <math>\bar{y} = \bar{x} + 2\% \bar{x} = 3200 + 0,02 \cdot 3200 = 3200 + 64 = 3264</math></p> <p><b>Szukane :</b> <math>x_{21} = ?</math></p>	Analiza zadania.
$3200 = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_{20}}{20} / \cdot 20$ $x_1 + x_2 + \dots + x_{20} = 64000$	
$\bar{y} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_{20} + x_{21}}{21}$ $3264 = \frac{64000 + x_{21}}{21} / \cdot 21$ $64000 + x_{21} = 68544$ $x_{21} = 4544$	<p>Obliczamy <math>x_{21}</math></p> <p>Za <math>x_1 + x_2 + \dots + x_{20}</math> podstawiamy 64000.</p>

**Przykład 12.5.5.** W tabeli przedstawiono wyniki ocen semestralnych trzech klas.

Oblicz średnią ocen wszystkich trzech klas razem.

	Klasa I a	Klasa I b	Klasa I c
Liczba uczniów	24	16	20
Średnia ocen w klasie	3,5	3,25	4,3

Rozwiązanie	Komentarz
$\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_{24}}{24} = 3,5 / \cdot 24$ $x_1 + x_2 + \dots + x_{24} = 84$	Obliczamy sumę ocen klasy I a.
$\frac{y_1 + y_2 + \dots + y_{16}}{16} = 3,25 / \cdot 16$ $y_1 + y_2 + \dots + y_{16} = 52$	Obliczamy sumę ocen klasy I b.
$\frac{z_1 + z_2 + \dots + z_{20}}{20} = 4,3 / \cdot 20$ $z_1 + z_2 + \dots + z_{20} = 86$	Obliczamy sumę ocen klasy I c.
$x = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_{24} + y_1 + y_2 + \dots + y_{16} + z_1 + z_2 + \dots + z_{20}}{24 + 16 + 20} =$ $= \frac{84 + 52 + 86}{60} = \frac{222}{60} = 3,7$	Obliczamy średnią ocen trzech klas razem.

### Średnia ważona

Średnią ważoną liczb  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_k$  z odpowiadającymi im wagami

$$n_1, n_2, n_3, \dots, n_k \in R_+ \text{ nazywamy liczę } x_w = \frac{n_1 \cdot x_1 + n_2 \cdot x_2 + n_3 \cdot x_3 + \dots + n_k \cdot x_k}{n_1 + n_2 + n_3 + \dots + n_k}$$

**Przykład 12.5.6** Oblicz średnią ważoną liczb z danymi wagami.

Liczba	3	5	8	11
waga	0,8	0,1	0,4	0,3

Rozwiązanie	Komentarz
$x_w = \frac{0,8 \cdot 3 + 0,1 \cdot 5 + 0,4 \cdot 8 + 0,3 \cdot 11}{0,8 + 0,1 + 0,4 + 0,3} =$ $\frac{2,4 + 0,5 + 3,2 + 3,3}{1,6} = \frac{9,4}{1,6} = 5,875$	Obliczamy średnią ważoną.

## ĆWICZENIA

Ćwiczenie 12.5.1. (1pkt.) Oblicz średnią arytmetyczną danych : 1, 1, 2, 4, 3, 3, 7.

**schemat oceniania**

Numer odpowiedzi	Odpowiedź	Liczba punktów
1	Podanie odpowiedzi.	1

Ćwiczenie 12.5.2. (1pkt.) W pewnej firmie 30 % pracowników zarabia średnio miesięcznie 4000 zł. Średnia płaca pozostałych pracowników firmy wynosi 250 zł.

Jaka jest średnia zarobków w tej firmie ?

**schemat oceniania**

Numer odpowiedzi	Odpowiedź	Liczba punktów
1	Podanie odpowiedzi.	1

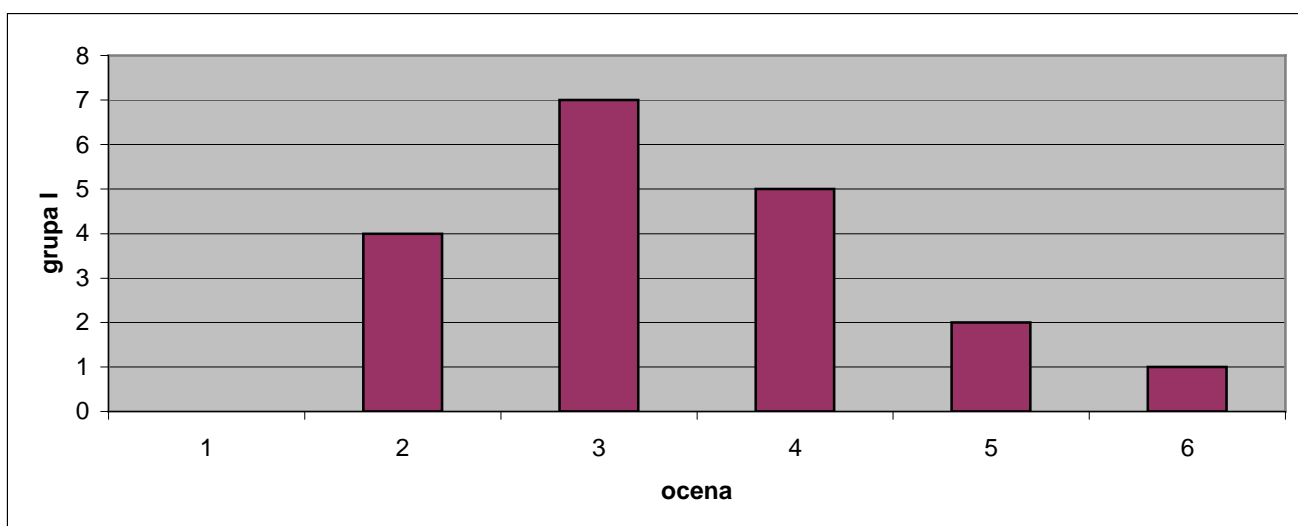
Ćwiczenie 12.5.3. (2pkt.) Średnia ocen z testu w klasie dwudziestoosobowej wynosi 3,2.

Jak zmieniłyby się średnia, gdyby dwie osoby, które otrzymały oceny niedostateczne napisały na dopuszczającą?

**schemat oceniania**

Numer odpowiedzi	Odpowiedź	Liczba punktów
1	Podanie sumy wszystkich ocen z testu.	1
2	Podanie średniej ocen po zmianie ocen z ndst na dop.	1

Ćwiczenie 12.5.4. (1pkt.) Na diagramie przedstawiono zestawienie ocen z klasówki w grupie pierwszej. Oblicz średnią ocen tej grupy.



**schemat oceniania**

Numer odpowiedzi	Odpowiedź	Liczba punktów
1	Podanie odpowiedzi.	1

Ćwiczenie 12.5.5. (1pkt.) Oblicz średnią ważoną liczb z danymi wagami.

Liczba	11	12	13
waga	0,1	0,3	0,6

**schemat oceniania**

<b>Numer odpowiedzi</b>	<b>Odpowiedź</b>	<b>Liczba punktów</b>
1	Podanie odpowiedzi.	1